به نام خدا

**ریاضی عمومی ۱**
پاییز ۹۵-۹۴

**دانشکده علوم ریاضی**
**دانشگاه صنعتی شریف**

# فصل چهارم- کاربردهایی از انتگرال

در این کاربرگ چند کاربرد از انتگرال و به طور خاص قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بررسی خواهیم کرد.

**فعالیت ۱** (جرم و چگالی).

الف) میله‌ای داریم که چگالی آن یکنواخت نیست؛ سر میله را در نقطه $a$ و انتهای آن را در نقطه $b$ قرار داده‌ایم. اگر $\mu(x)$ چگالی در نقطه $x$ باشد، با استفاده از مجموع ریمان نشان دهید جرم کل میله برابر است با

$$m = \int_a^b \mu(x)dx.$$

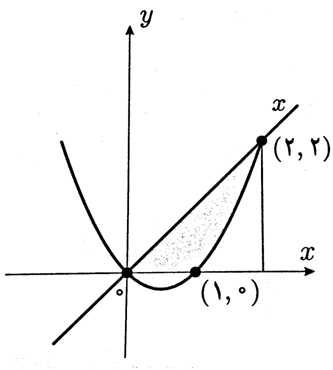
ب) نقطه گرانیگاه این میله برابر است با

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\mu(x)dx}{\int_a^b \mu(x)dx}.$$

با توجه به این نکته، نشان دهید اگر چگالی میله یکنواخت باشد، آنگاه گرانیگاه میله برابر است با $\frac{a+b}{۲}$.

**فعالیت ۲** (محاسبه مساحت).

الف) مساحت ناحیه محصور بین نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^۲ - x$ را محاسبه کنید (شکل ۱).

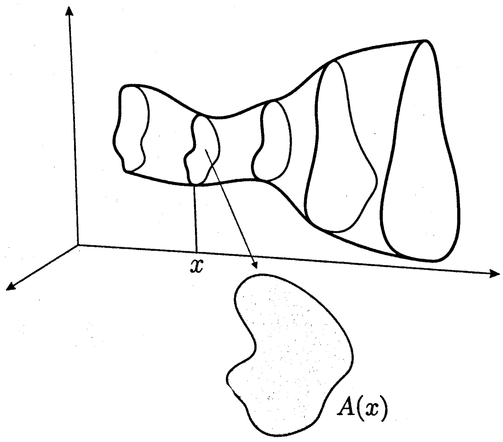



شکل ۱

ب) مساحت ناحیه محصور به محور $x$، محور $y$ و منحنی $y^۲ - ۲y - x + ۲ = ۰$ را بدست آورید.

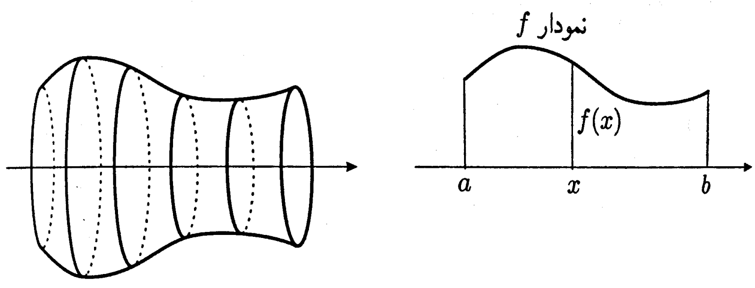
**فعالیت ۳** (محاسبه حجم). همان‌طور که دیدید، برای محاسبه مساحت، به طور شهودی طول‌های بین دو نمودار را جمع می‌کردیم. برای محاسبه حجم نیز مساحت‌ها را جمع می‌کنیم. به این موضوع شهودی، اصل کاوالیری می‌گویند (شکل ۲). بنابراین اگر شکلی داشته باشیم که مساحت ناحیه‌ی اشتراک آن با صفحه‌ی عمود بر محور $x$ ها در نقطه‌ای چون $x$، $A(x)$ باشد، با فرض انتگرال‌پذیری $A(x)$، حجم شکل برابر است با

$$\int_a^b A(x)dx.$$




شکل ۲

الف) فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و مقادیر $f$ غیرمنفی باشند. ناحیه محصور بین نمودار $f$، محور $x$ و خط‌های قائم $x=a$ و $x=b$ را در فضا حول محور $x$ یک‌بار به طور کامل دوران می‌دهیم (شکل ۳). فرمولی برای حجم این شکل بنویسید.




شکل ۳

ب) با استفاده از فرمول قسمت (الف)، حجم مخروط به ارتفاع $h$ و مقطع دایره‌ای به شعاع $R$ را محاسبه کنید.

**فعالیت ۴** (مشتق‌گیری از انتگرال).

الف) فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\alpha,\beta : I\to\mathbb{R}$ دو تابع مشتق‌پذیر روی بازه $I$ باشند. تابع $F:I\to\mathbb{R}$ را به صورت

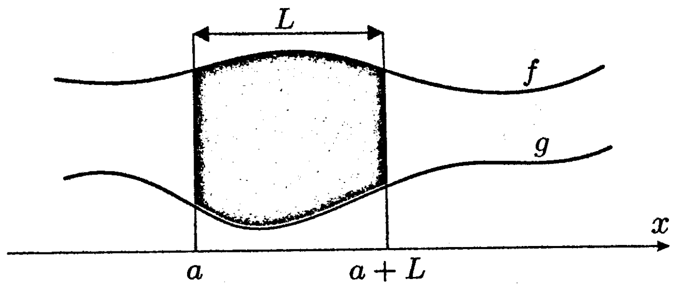
$$F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $F$ مشتق‌پذیر است و

$$F'(x)=\beta'(x)f\left(\beta(x)\right)-\alpha'(x)f\left(\alpha(x)\right).$$

ب) توابع پیوسته $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ داده شده‌اند و به ازای هر عدد حقیقی مانند $x$، $f(x)>g(x)$. به ازای هر دو خط قائم مانند $x=a$ و $x=a+L$ به فاصله ثابت $L$ از هم، مساحت محصور بین این دو خط و نمودارهای $f$ و $g$ را با $S(a)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید به ازای عددی مانند $a$، $S(a)$ بیشترین مقدار ممکن باشد. نشان دهید

$$f(a)-g(a)=f(a+L)-g(a+L).$$




شکل ۴